برنامه ریزی خطی

مهدی تقوی

ازبرنامه ریزی خطی برای حل مسائل مربوط به حداقل یاحداکثر ساختن یک تابع هدف باتوجه به یک سری محدودیت هااستفاده می شود. مسائلی که به شکلی قابل حل بوسیله برنامه ریزی خطی درمی آیند رامسائل برنامه ریزی ریاضی می خوانیم.

شکل عمومی مسائل برنامه ریزی خطی - یک مسئله اقتصادی قابل - حل بوسیله برنامه ریزی خطی غالبا" شامل یک تابع هدف که ترکیبی خطی ازمتغیرهاست و یک سری محدودیت که آنهاهم توابع خطی بوده و بشکل نابرابری ارائه می شوند، می باشد. یک مثال که درآن تنها دو متغیر X_1 و X_2 وجوددارد می تواند مثال زیرباشد:

تابع $Z = ۱۰ X_1 + ۳ X_2$ راباتوجه به محدودیتهای:

$$X_1 \leq ۵۰$$

$$۹X_1 + ۴ X_2 \leq ۲۵۰$$

$$X_1 \geq . \quad X_2 \geq .$$

حداکثر کنید. یا:

تابع: $W = ۲ U_1 + ۳U_2 + ۱۱ U_3$

راباتوجه به محدودیتهای:

$$5U_1 + \tfrac{1}{2}U_2 + U_3 \geq 86$$

$$U_1 \geq 0 \quad U_2 \geq 0 \quad U_3 \geq 0$$

حداقل کنید.

مثالهای ازمسائلی که می توانند درچارچوب برنامه ریزی خطی حل شوند می توانند عبارت باشندار:

تعیین ترکیب تولیدات یك کارخانه که چندکالای مختلف را تولیدمیکند. تعیین مسیرحرکت کامیون هابرای حداقل ساختن هزینه حمل ونقل. ترکیب موادبعنوان کودشیمیائی یاترکیب دانه هابرای تغذیه مرغ یادام برای حداقل ساختن هزینه باتوجه به مقدارموردنیازموادغذائی. هر کدام ازمسائل فوق رامی توان به سرعت بابرنامه ریزی خطی حل کرد.

درفرموله کردن مسائل برنامه ریزی خطی چهارفرض اساسی درنظرگرفته می شود:

۱ـ خطی بودن ـ تمام متغیرهائی که انتخاب می شوند بایددرتابع هدف و محدودیت ها خطی باشند.

۲ـ پیوستگی ـ تمام متغیرهای انتخاب شده بایدقادربه قبول تمام ارزش های عددی باشند.

۳ـ قابلیت جمع و استقلال ـ مقدارهریك ازمتغیرهارامی توان بطوراختیاری، بدون توجه به مقدارسایرمتغیرهاانتخاب کرد. کل مقدارمنابع مورداستفاده(یامحصول تولیدشده)رامی توان با جمع کردن مقدارمنابع(محصول تولیدشده) مورداستفاده درهر فعالیت بدست آورد.

۴ـ نسبیت ـ مقدارعوامل تولید مورداستفاده برای هرواحدمحصول یا برای تمامی سطوح تولید ثابت باشد. برای مثال اگربرای تولید

یك گلدان دو ساعت وقت صرف شود، برای تولید ۱۰ گلدان نیاز به ۲۰ ساعت کار هست.

حل مسائل برنامه ریزی خطی:

حال یك مثال عملی برای شناسائی مسائلی که با استفاده از روش - برنامه ریزی خطی حل می شوند و وراه حل این مسائل ارائه می کنیم:

مثال ۱- مسئله ترکیب محصولات نفتی - فرض کنید که یك پالایشگاه دو محصول بنزین و نفت سفید راتولید می کند و می خواهد پر سودترین ترکیب تولیداین دو راباتوجه به محدودیتهای ظرفیت پالایشگاه و ظرفیت انباربدست آورد. فرض کنید X_1 مقداربنزین و X_2 مقدارنفت سفیدرامشخص می کنند. فرض کنید که سودخالص حاصل ازتولید بنزین ۱۶ ریال برای هربشکه و سودخالص حاصل ازتولیدنفت سفید ۸ ریال برای هربشکه می باشد. مابرای حداکثرکردن تابع سودکه عبارت از $16 X_1 + 8 X_2$ ریال است، کوشش می کنیم. دو سری محدودیت داریم. ظرفیت انبارمابه ۵۰۰۰ گالن بنزین و ۱۲۰۰۰ گالن نفت سفید محدود می گردد. کل ظرفیت پالایشگاه نیز ۲۷۰۰۰ واحداست. هر گالن بنزین نیاز به ۳ واحد و هر گالن نفت سفید نیاز به ۲ واحدازظرفیت تولیدی دارند. حال مسئله رامی توانیم بشکل زیردرآوریم:

تابع: $Z = 16 X_1 + 8 X_2$ راباتوجه به محدودیتهای:

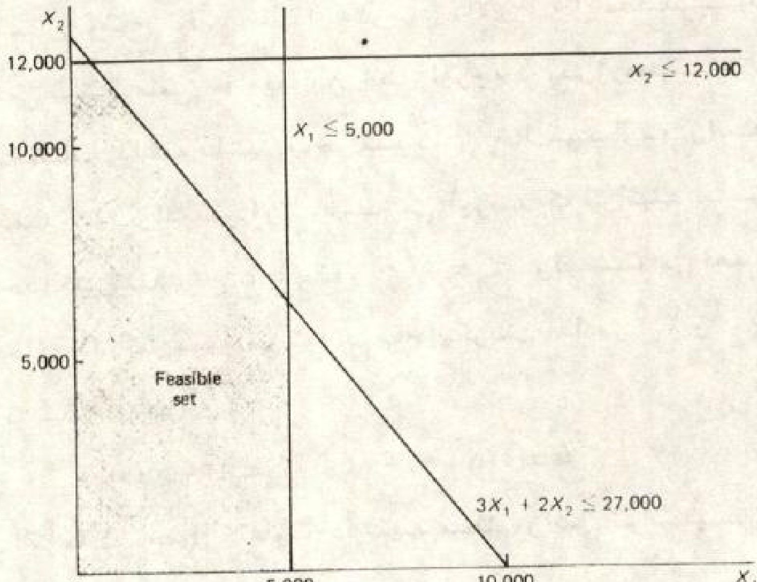
$$X_1 \leq 5000 \quad X_2 \leq 12000$$

$$3 X_1 + 2 X_2 \leq 27000$$

$$X_1 \geqslant 0 \qquad X_2 \geqslant 0$$

حداکثر کنید.

ساده ترین راه برای حل این مسئله این است که کار را با رسم معادلات محدودیت آغاز کنیم، تابدیلهائی راکه میتوانیم انتخاب کنیم، مشخص نمائیم. درنمودار ۱، محدودیتی که مشخص می کند تولید بنزین باید برابر یا کمتر از ۵۰۰۰ گالن باشد، خط عمود بر محور افقی درسطح تولید ۵۰۰۰ است. محدودیت تولید ۱۲۰۰۰ گالن نیز خط موازی محور افقی در سطح تولید ۱۲۰۰۰ گالن نفت سفید می باشد. محدودیت فنی نیز بوسیله خط $۳X_1 + ۲X_2 = ۲۷۰۰۰$ نشان داده میشود.



نقاطی که این نابرابری را برآورده می سازند روی این خط یا درقسمت تحتانی آن قرار دارند. محورهای مختصات نیز محدودیت غیرمنفی بودن X_1 و X_2 را برآورده می سازند. ناحیه ای که تولیدممکن رامشخص می کند، شامل ناحیه ای

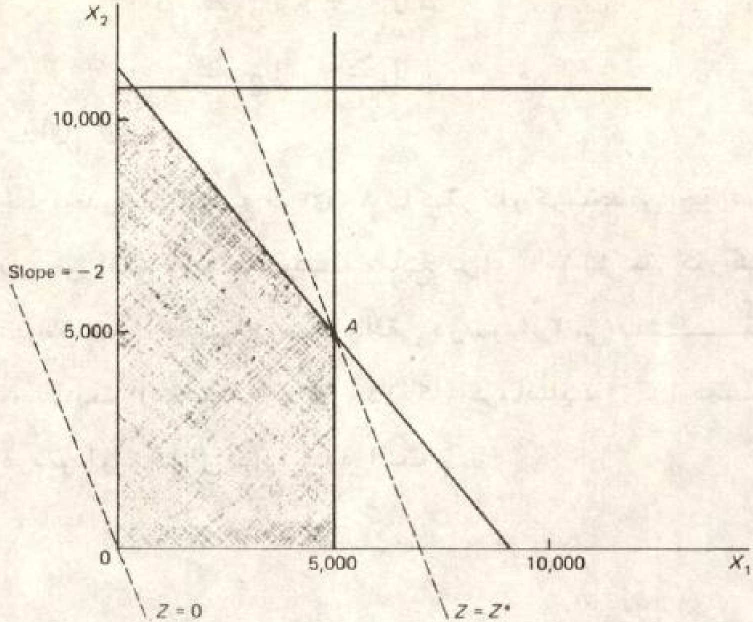
است که درآن تمامی نقاطی‌که بطورهمزمان هریـــــک از محدودیت ها رابرآورده می کندرادربرمی گیرد. تمـــام نقاطی که درسطح هاشورزده قراردارند، ازجمله مبـــدا مختصات معرف ترکیبات مختلف ازتولید بنزین و نفـت ـ سفید هستند که جوابهای ممکن مسئله حداکثرساختن ســود می باشند.

حال ما می خواهیم راه حلی که سودراحداکثرمی کنـــد را بدست آوریم. تابع سود $Z = ۱۶ X_1 + ۸ X_2$ رامی توانیم بشکل $X_2 = Z/۸ + (-\frac{۱۶}{۸}) X_1$ بنویسیم. هنـگامی که $Z = ۰$ است ، این خط ازمبدا مختصات گذشته و دارای شیب ۲ ـ است. بوضوح تولید صفرواحداز هردو کالا راه حل مطلــــوب نمی باشد. مامی خواهیم این خط راهرچه دورتر ازمبـــدا ـ مختصات داشته باشیم. باحرکت دادن خط سودبطرف راست نقطه A رادرنمودار۲ بدست می آوریم، که ترکیب ســود حداکثرکننده $X_2^* = ۵۰۰۰$ و $X_1^* = ۶۰۰۰$ رابدست می دهد. حال حداکثرسودرامی توانیم باجایگزینی مقادیر X_1^* و X_2^* بدست آوریم:

$$Z^* = ۱۶(۵۰۰۰) + ۸(۶۰۰۰) = ۱۲۸۰۰۰$$

اگرما ۵ محصول متفاوت داشتیم، مسئله رانمی توانستیـم از طریق نمودارحل کنیم.

مثال ۲ـ انتخاب روش تولید برای حداقل کردن هزینه تولید ـ فـرض کنید که دونوع کارگرمتخصص U_1 و غیرمتخصص U_2 راداریم. مزدکارگرمتخصص ۴۰۰۰ ریال وکارگرغیرمتخصص ۲۴۰۰ ریال درروزاست. مامی خواهیم تابع $W = ۴۰۰۰ U_1 + ۲۴۰۰ U_2$



راحداقل کنیم. امامحدودیتهـــائی نیزوجوددارد. اولیـــن محدودیت این است که باید۵۰۰ واحدکالاتولید کنیم که هـر واحدآن نیاربه $\frac{1}{5}$ واحدکارگرمتخصص یا ½ واحدکارگر غیرمتخصص دارد. این محدودیت رامی توانیم باتابع تولیـد $5U_1 + 2U_2 \geq 500$ نشان دهیم. علاوه براین تنهـــا ۸۰ کارگر متخصص و ۲۰۰ کارگرغیرمتخصص می توانیـــــــم دراختیارداشته باشیم. علاوه براین شرکت باید ۱۵۰ واحـد کارگربانسبت کارگرمتخصص به غیرمتخصص ۲ به۱استخدام کند. این محدودیت رامی توان بوسیله نامعادلــــــــــه $\frac{1}{2}U_1 + U_2 \geq 150$ نشان داد. حال مسئله رامی توانیـــم بشکل زیردرآوریم:

تابع $W = 4000\,U_1 + 2400\,U_2$ راباتوجه به محدودیتهای:

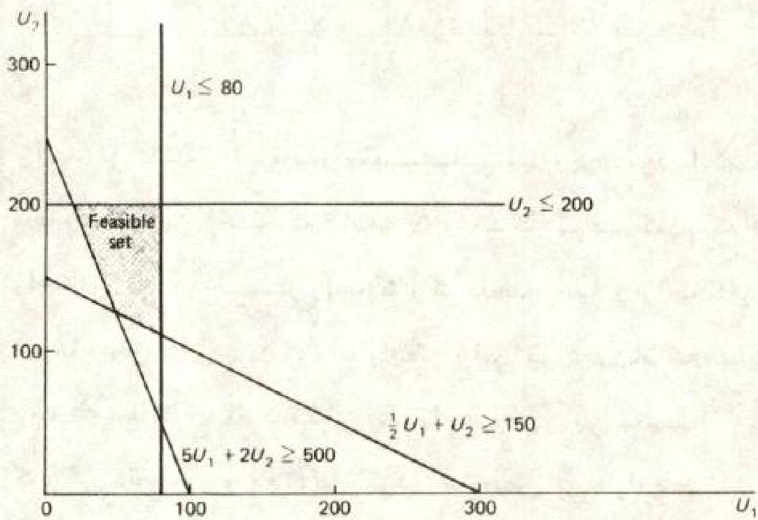
$$U_1 \leq 80 \qquad U_2 \leq 200$$

$$\frac{1}{2}U_1 + U_2 \geq 150$$

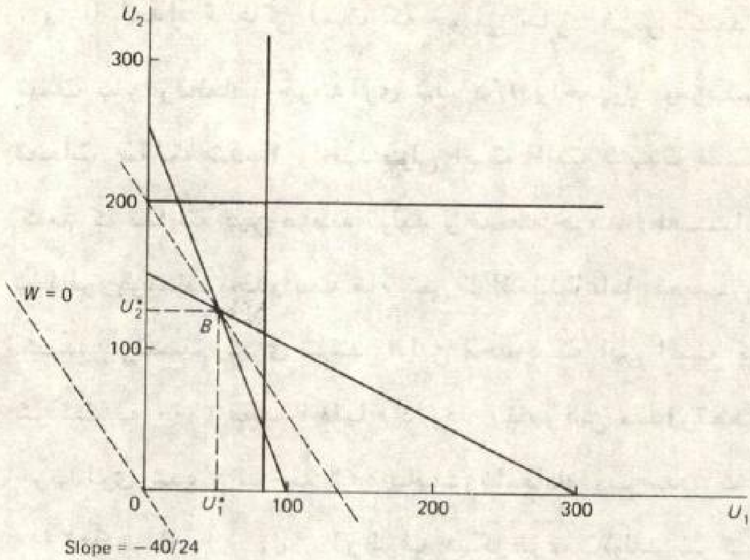
$$5U_1 + 2U_2 \geq 500$$
$$U_1 \geq 0 \quad U_2 \geq 0$$

حداقل کنید .

خط محدودیت منابع برای ۸۰ یاکمتر کارگرمتخصص خط عمود برمحورافقی وخط محدودیت منابع برای ۲۰۰ یاکمترکارگر غیرمتخصص خط موازی محورافقی درنمودار۳ می باشد .
محدودیت استخدام حداقل ۱۵۰ کارگربانسبت ۲ ـ ۱ نیز درنمودار ۳ نشان داده شده است .



نقاطی که ناحیه تولید ممکن رابرای شرکت نشان می دهند درقسمت تحتانی محدودیت های کارگر، امادرقسمت فوقانی محدودیت فنی و محدودیت استخدام حداقل ۱۵۰ کارگرقرار می گیرند که این ناحیه بوسیله هاشورمشخص شده است .
مامی خواهیم راه حلی پیداکنیم که هزینه تولیدراحداقل می کند. ابتدا معادله هزینه رابشکل:



$U_2 = \frac{W}{۲۴۰۰} - (\frac{۴۰۰۰}{۲۴۰۰})\, U_1$ درمی آوریم. برای $W=۰$ خط هزینه ازمبدا مختصات گذشته و دارای شیب $(-\frac{۴۰}{۲۴})$ است. برای پیداکردن نقطه ای که باتوجه به محدودیتها هزینه راحداقل می کند، خط هزینه رابطرف بالاوراست حرکت می دهیم و نقطه B رابدست می آوریم. (نمودار ۴).

راه حلی که هزینه راحداقل می کند $U_1^* = ۵۰$ و $U_2^* = ۱۲۵$ بوده و حداقل هزینه عبارت می باشد از:

$$W^* = ۴۰۰۰ (۵۰) + ۲۴(۱۲۵) = ۵۰۰۰۰$$

مثال ۳- تصمیم درموردساخت یاخرید - یک شرکت ممکنست گاه مجبوربه تصمیم درموردخریدیاساخت قطعات بگیرد. شرکتهای تولیدکننده دوربین، اتومبیل و غیره غالبا" باچنین مسائلی روبرومی شوند.

فرض کنید U_1 تعدادقطعاتی است که شرکت خریداری کرده و U_2 تعداد قطعاتی است که خودمی سازد. فرض کنید که قیمت بازارقطعات خریداری شده ۱/۵ واحدپولی وهزینه قطعات ساخته شده ۱ واحد پولی است. البته بایدتوجه کنیم که تفاوت بین هزینه تولید و قیمت خرید قطعات، بخاطروجودسایرمحدودیت ها، نمی توانندتنهاعامل تعیین‌ـ کننده درتصمیم گیری باشد. اولین محدودیت این است که شرکت به ۲۰۰۰ قطعه احتیاج دارد. بنابراین مقدارقطعات خریداری شده و ساخته شده بایددرنامعاذله زیرصدق کند: $U_1 + U_2 \leq ۲۰۰۰$. ازطرف دیگرظرفیت‌تولید شرکت تنها ۱۲۵۰ قطعه وظرفیت انبارآن ۱۵۰۰ قطعه می باشد. ما می توانیم مسئله فوق رابشکل زیربنویسیم:

تابع $W = ۱/۵\ U_1 + U_2$ راباتوجه به محدودیتهای:

$$U_1 \leq ۱۵۰۰ \qquad U_2 \leq ۱۲۵۰$$

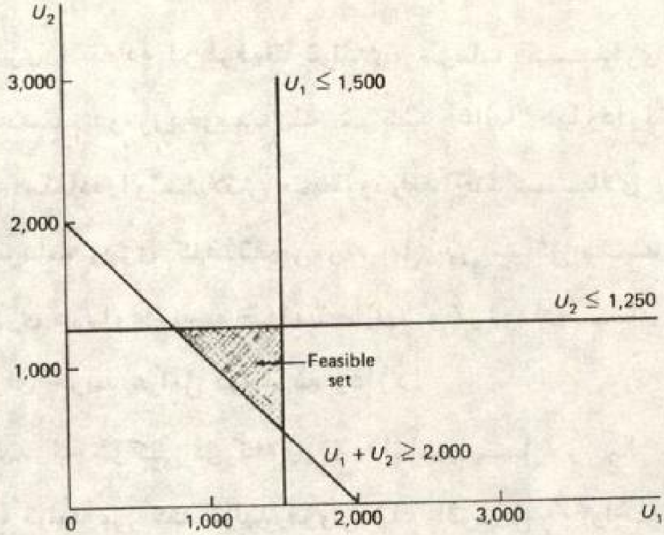
$$U_1 + U_2 \geq ۲۰۰۰$$

$$U_1 \geq ۰ \qquad U_2 \geq ۰$$

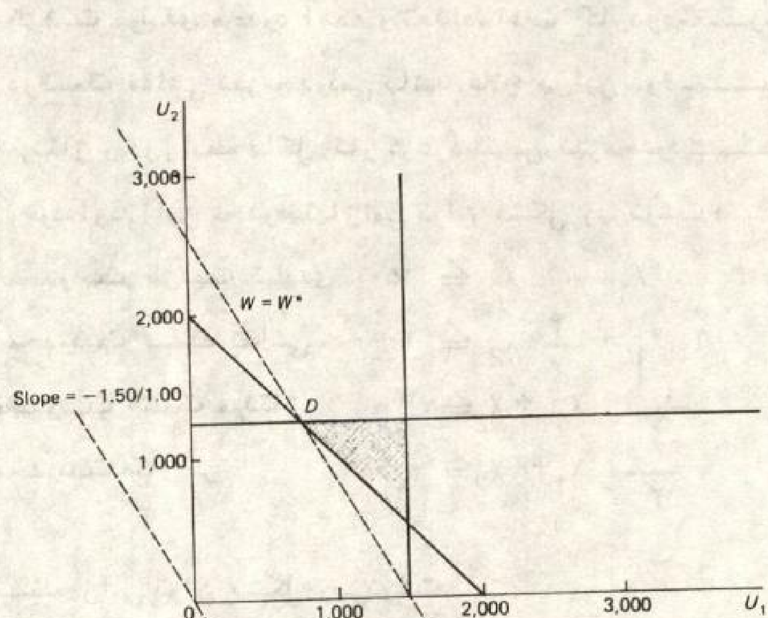
حداقل کنید.

هریك ازمحدودیت هادرنمودار ۵ رسم شده اند. ناحیه ممکن و مطلوب منطقه هاشورزده می باشد. تابع هدف $W = ۱/۵\ U_1 + U_2$ یك خط هزینه است که می تواند بشکل زیربازنویسی شود:

$U_2 = W - (۱/۵)\ U_1$ اگراین خط هزینه رابرای $W=۰$ رسم کنیم باشیب ۱/۵ــ ازنقطه مبداخواهدگذشت. برای تعیین بهترین ترکیب قطعات خریداری و ساخته شده، باید



خط هزینه رابطرف راست و بالاحرکت دهیم. بااین کـــار نقطه D رابدست خواهیم آورد. راه حل مطلوب $U_1^* = ۷۵۰$ و $U_2^* = ۱۲۵۰$ می باشد. کل هزینه نیزعبارت خواهدبود از:



$$۲۳۷۵ = ۱/۵\,(۷۵۰) + ۱\,(۱۲۵۰)$$

مثال۴ـ برنامه ریزی استفاده ازظرفیت تولیدی، سرمایه گذاری، کارگر، و تصمیم درموردخرید ـ یك شرکت غالبا" نیازدارد که برای استفاده ازتسهیلاتش بمنظورتولید چندکالای مختلف برنامه ریزی کند. تعیین راه حل این مسائل به تصمیم گیری درباره توسعه ظرفیت تولید و قراردادهای جدید برای خرید عوامل تولید نیازدارد.

فرض کنید که شرکتی دو کالای X_1 (اتومبیل) و X_2 (کامیون) تولید می کند تولیدوفروش یك اتومبیل ۴۰۰واحد پولی و تولید وفروش کامیون ۴۵۰ واحدپولی سودخالص بوجود می آورد. شرکت می خواهد تابع سود خودراکه عبارت از: $Z = ۴۰۰\,X_1 + ۴۵۰\,X_2$ حداکثرکند. شرکت با محدودیتهای زیر روبروست:

ظرفیت تولیدی محدود است و تعدادساعات کاردردسترس درقسمت نقاشی نیزمحدودمی باشد. علاوه براین درقسمت مونتاژ و دررابطه باکل کارگردردسترس نیزمحدودیت وجوددارد. این محدودیتها رامی توان بشکل زیرنوشت:

محدودیت ظرفیت تولیدی $X_1 + ۲\,X_2 \leq ۱۵۰۰$

محدودیت قسمت نقاشی $۲\,X_1 + \frac{۴}{۳}X_2 \leq ۲۰۰۰$

محدودیت قسمت مونتاژ $\frac{۱}{۵}X_1 + X_2 \leq ۶۰۰$

محدودیت کارگر $\frac{۲}{۳}X_1 + X_2 \leq ۱۰۰۰$

مسئله رامی توان بشکل زیرنوشت:

تابع $Z = ۴۰۰\ X_1 + ۴۵۰\ X_2$ راباتوجه به محدودیتهای:

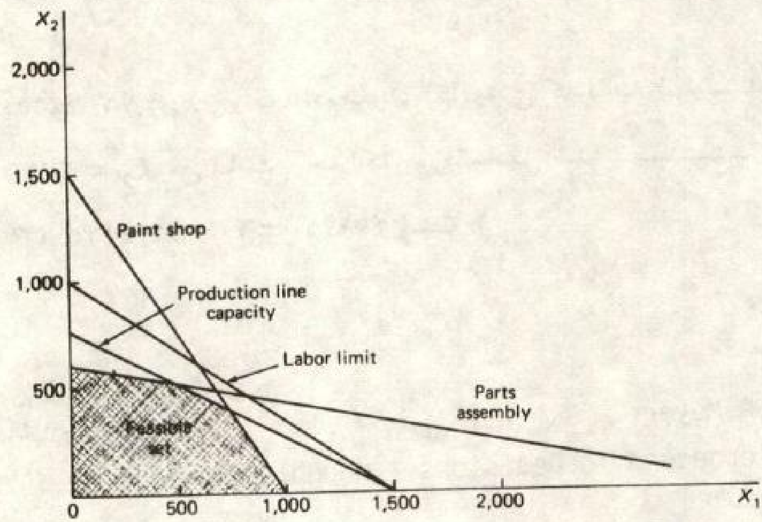
$$X_1 + ۲X_2 \leq ۱۵۰۰$$

$$۲\ X_1 + \frac{۴}{۳}X_2 \leq ۲۰۰۰$$

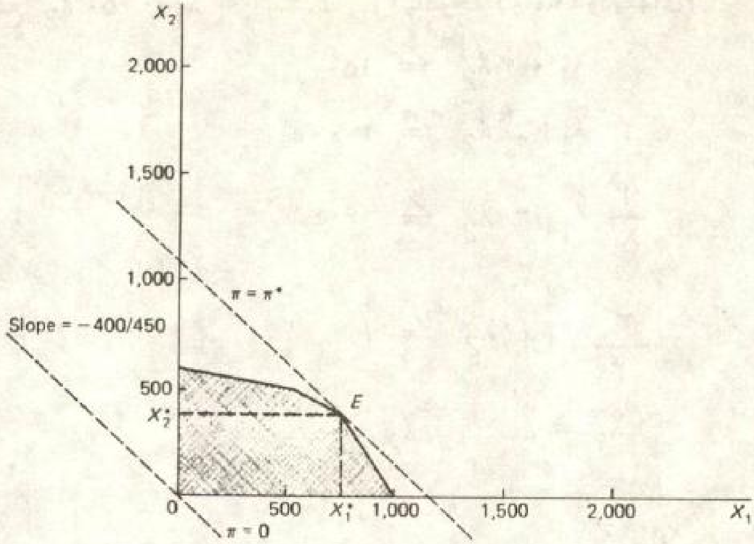
$$\frac{۱}{۵}X_1 + X_2 \leq ۶۰۰$$

$$\frac{۲}{۳}X_1 + X_2 \leq ۱۰۰۰$$

$$X_1 \geq ۰ \qquad X_2 \geq ۰$$



نمودار ۷ خطوط محدودیت رسم شده رانشان می دهد. ومنطقه مطلوب بوسیله نقاط هاشورزده نشان داده می شود. بـــرای تعیین مطلوب ترین برنامه تولید، ابتداتابع سود رابشکل: $X_2 = \frac{Z}{۴۵۰} - (\frac{۴۰۰}{۴۵۰})\ X_1$ می نویسیم. برای $Z = ۰$ خـــط سود ازمبدا مختصـــات می گذرد ودارای شیب $-\frac{۴۰۰}{۴۵۰}$ می باشد. اگرخط سود راازمبدا دورسازیم، نقطه E رادر نمودار ۸ بدست می آوریم. تعدادمطلوب اتومبیلی که بایـــد



تولیدشود ۷۵۰ = X_1^* و تعدادمطلوب کامیونی که باید تولید شود ۳۷۵ = X_2^* می باشد. حداکثر سودتحصیل شده نیز ۴۶۸۷۵۰ = ۴۰۰(۷۵۰)+۴۵۰(۳۷۵) است.

ماخذ: R.A.Meyer
Microeconomic Decisions - Houghton Mifflin Co.1976.